

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

- 博客园
- 首页
- 新随笔
- 联系
- 订阅
- 管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
 园龄：4年7个月
 粉丝：288
 关注：5
 +加关注

盖楼抽奖
 #她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
 分享最打动的科技女性故事
 活动时间：2022年3月8日-3月18日
 马上参与

搜索

常用链接

- 我的随笔
- 我的评论
- 我的参与
- 最新评论
- 我的标签

积分与排名

积分 - 457097
 排名 - 1198

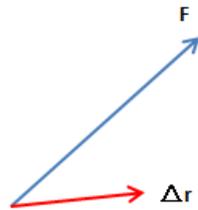
多变量微积分笔记13——线积分

线积分或路径积分是积分的一种。在数学中，线积分的积分函数的取值沿的不是区间，而是特定的曲线，称为积分路径。在物理学上，线积分是质点在外力作用下运动一段距离后总功。

线积分

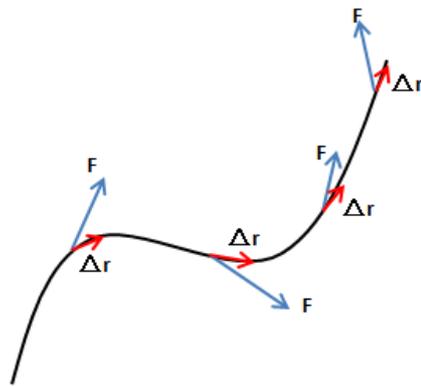
在物理学上，力所做的功等于力与位移的乘积；更严格地说，力在足够小的距离上做的功等于力的向量与位移向量的点积：

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$$



功描述是需要多少能量才能使质点以这样的方式运动。

如果外力不是恒力，要算出外力所做的总功，就是把运动轨迹分成无限小段，然后把外力对每一小段所做的功（也就是力的向量和距离的向量的点积）加起来，其本质上就是积分。



假设C是外力作用下运动的轨迹，那么外力在该轨迹上做的总功：

$$W = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}_i = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

然而这种方式不利于计算，因为无法对向量进行积分。现在将位移变成瞬时速度和微小时间的乘积：

$$\vec{\Delta r} = \vec{v} \Delta t = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t_i} \Delta t_i$$

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

这表示在每个微小的时间段内, 质点移动了微小的距离。W可以解释为从 t_1 到 t_2 时间内, 质点在外力的作用下移动了一段距离, 在这段距离上力所做的总功:

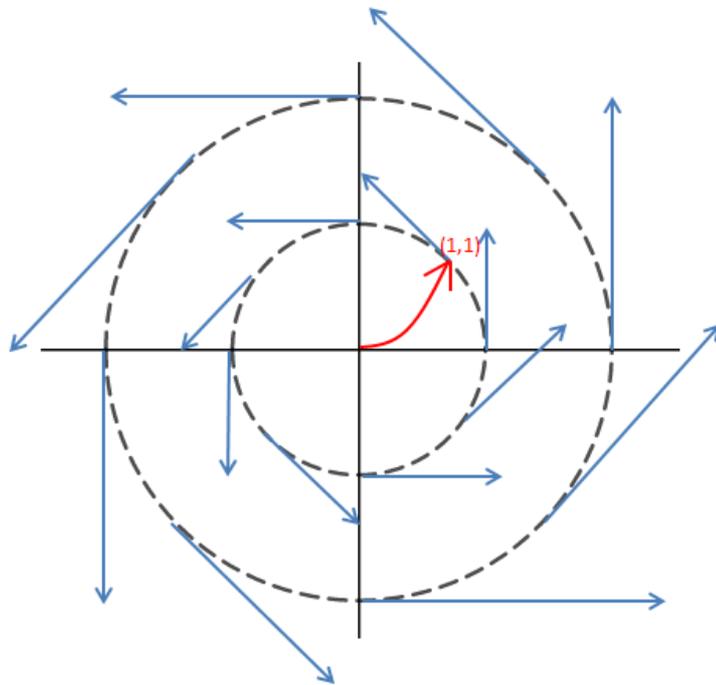
$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} dt \right) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F} \cdot \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t_i} \Delta t_i \right)$$

这种方式将无法计算的向量积分变成了可计算的非向量积分。

向量场中的线积分

已知外力和外力作用下的运动轨迹, 力场 $\vec{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, 运动轨迹 $C: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$, 计算力在该轨迹上做的功。

在这里, \vec{F} 是外力, C 是在 \vec{F} 作用下的运动轨迹, 由运动轨迹的参数方程可知, $y = x^2$, 这相当于在外力 \vec{F} 的作用下运行了一段抛物线:



上图中红色向量就是在外力 \vec{F} 作用下运动的轨迹 C , 为了理解方便, 将 t 看成时间(可参考《线性代数笔记6——直线和曲线的参数方程》)。 \vec{F} 在 C 上的总功:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$\vec{F} = \langle -y, x \rangle = \langle -t^2, t \rangle$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle = \langle 1, 2t \rangle$$

$$\int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^1 \langle -t^2, t \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle dt = \int_0^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

另一种方式理解, \vec{F} 和 \vec{r} 都有两个分量:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\vec{F} = \langle -y, x \rangle, \quad d\vec{r} = \langle dx, dy \rangle$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle -y, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \int_C (-ydx + xdy)$$

这里存在两个变量，但是单变量积分无法对两个变量做积分，所以需要另外找一个变量t替换x和y：

$$x = t, dx = dt; \quad y = t^2, dy = 2t dt$$

$$\int_C (-ydx + xdy) = \int_0^1 (-t^2 dt + t \cdot 2t dt) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

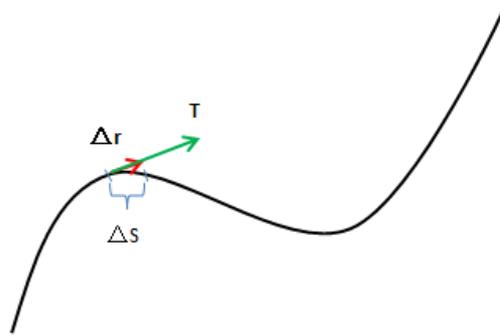
需要注意的是，线积分只取决于与轨迹C，而不是如何参数化，我们可以保留任何一个参数，对于本例来说， $y = x^2$ ，可以去掉变量y：

$$\vec{F} = \langle -y, x \rangle = \langle -x^2, x \rangle, \quad d\vec{r} = \langle dx, dy \rangle = \langle dx, 2x dx \rangle$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle -x^2, x \rangle \cdot \langle dx, 2x dx \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

几何法计算线积分

再来看一下几何方法：



如上图所示，曲线是质点运动的轨迹， $\Delta\vec{r}$ 是在外力 $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ 作用下移动的微小距离，它是一个向量，与曲线相切； \mathbf{T} 是 $\Delta\vec{r}$ 方向的单位向量； Δs 是轨迹上对应的弧长，是一个标量。

$$\Delta\vec{r} \approx \vec{T} \Delta s \Rightarrow d\vec{r} = \langle dx, dy \rangle = \vec{T} ds$$

如果是瞬时速度，相当于位移关于时间的微分：

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{T} \frac{ds}{dt}$$

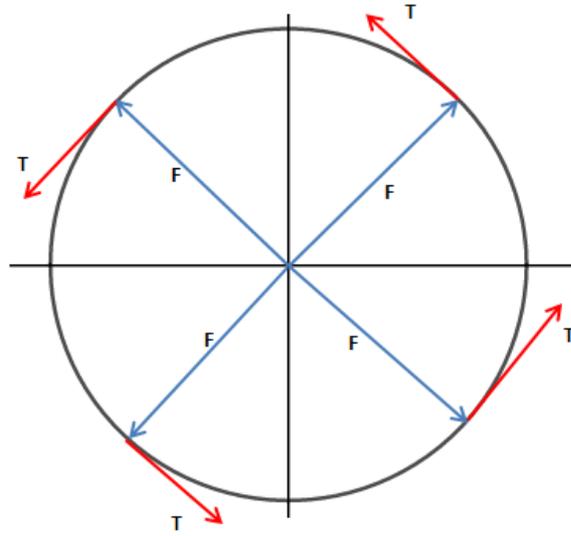
外力在轨迹上C上做的总功：

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle M, N \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

\mathbf{F} 与 \mathbf{T} 的点积是标量，这就将不能积分的 $d\vec{r}$ 转换成了可积的 ds 。

示例1

几何法对某些问题的处理会更简单：质点在力场 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ 中沿以原点为圆心， a 为半径的圆做逆时针圆周运动，对于圆上的任一点，都存在

$T \perp F$:

$$\vec{F} \perp \vec{T} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{T} = 0$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 0$$

如果用参数方程处理, 对于圆来说 $x^2 + y^2 = a^2$, 可以用 θ 替换 x 和 y :

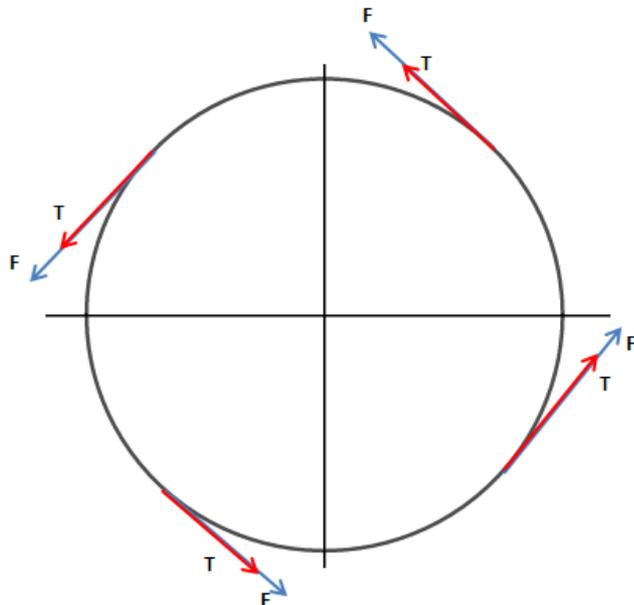
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \theta, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \theta$$

$$dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \theta d\theta, \quad dy = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \langle M, N \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_C \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \theta \right\rangle \cdot \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \theta d\theta, \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \theta d\theta \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

示例2

如果力场变为 $F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, 则在轨迹上的任意点, F 平行于 T :



$$\vec{F} // \vec{T} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2} = a$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C a ds = a \int_C ds = a \text{len}(C)$$

C是沿着圆的运动轨迹，ds是轨迹上微小的弧长，所以弧长的积分等于轨迹长度len(C)。如果运动一周：

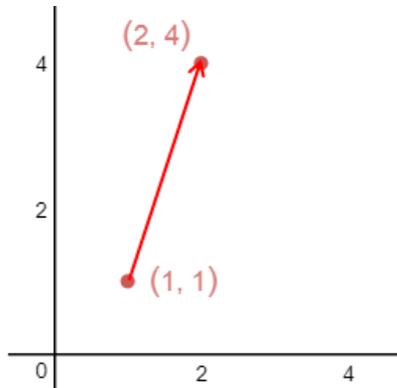
$$a \text{len}(C) = a(2\pi a) = 2\pi a^2$$

综合示例

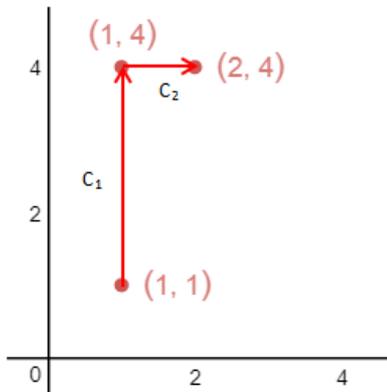
示例1

在向量场 $\mathbf{F} = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle$ 中，计算线积分 $\int_C \mathbf{F} dr$

a)



b)



a)

根据轨迹参数化：

$$x = t, \quad y = 3t - 2, \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$dx = dt, \quad dy = 3dt$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \langle xy, x^2 + y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_C xydx + \int_C x^2 dy + \int_C y^2 dy \\ &= \int_1^2 t(3t-2)dt + \int_1^2 t^2 3dt + \int_1^4 y^2 dy \\ &= (t^3 - t^2)|_1^2 + t^3|_1^2 + \frac{y^3}{3}|_1^4 \\ &= 32 \end{aligned}$$

b)

C_1 轨迹上, $x = 1$ 不变, $dx=0$, $1 \leq y \leq 4$:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \langle xy, x^2 + y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_{C_1} xydx + \int_{C_1} (x^2 + y^2)dy \\ &= 0 + \int_1^4 (1 + y^2)dy \\ &= \left(y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

C_2 轨迹上, $y = 4$ 不变, $dy=0$, $1 \leq x \leq 2$:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \langle xy, x^2 + y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_{C_2} xydx + \int_{C_2} (x^2 + y^2)dy \\ &= \int_1^2 4xdx + 0 \\ &= 2x^2 \Big|_1^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 24 + 6 = 30$$

示例2

在向量场 $\mathbf{F} = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle$ 中, C 的轨迹函数是 $y = x^2$, 从(1,1)到(2,4)。用两种参数方程计算线积分 $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$, 1) $x = t, y = t^2$ 2) $x = e^t, y = e^{2t}$

1)

$$dx = dt, \quad dy = 2t dt$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \langle xy, x^2 + y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_C (xy dx + x^2 dy + y^2 dy) \\ &= \int_1^2 (t^3 dt + 2t^3 dt + 2t^5 dt) \\ &= \int_1^2 3t^3 dt + \int_1^2 2t^5 dt \\ &= \frac{3}{4} t^4 \Big|_1^2 + \frac{1}{3} t^6 \Big|_1^2 \\ &= \frac{129}{4} \end{aligned}$$

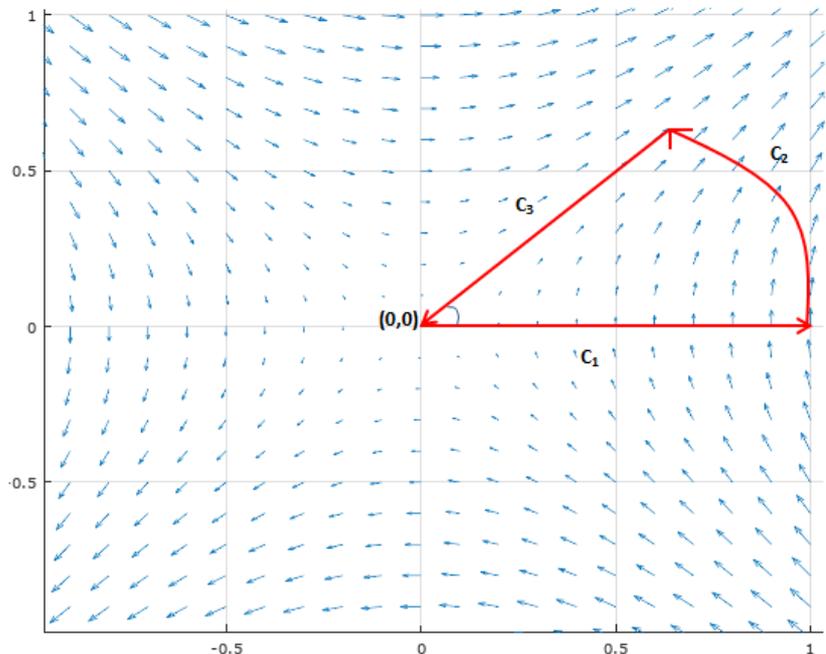
2)

$$dx = e^t dt, \quad dy = 2e^t dt, \quad 0 \leq t \leq \ln 2$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C (xy dx + x^2 dy + y^2 dy) \\ &= \int_0^{\ln 2} (3e^{4t} + 2e^{6t}) dt \\ &= \frac{3}{4} e^{4t} \Big|_0^{\ln 2} + \frac{1}{3} e^{6t} \Big|_0^{\ln 2} \\ &= \frac{129}{4} \end{aligned}$$

示例3

如下图所示，在向量场 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 中，质点移动的轨迹是 $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$ ，三段轨迹围成了闭合的扇形，扇形的半径是1，弧度是 $\pi/4$ ，求力场中对质点的总功。



$$W = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

C_1 的轨迹在x轴, 从(0,0)到(1,0), $y = 0$ 保持不变:

$$y = 0, dy = 0$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \langle y, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \int_{C_1} (y dx + x dy) = 0$$

C_2 的轨迹在是单位圆的一段弧长, 可以参数化 x, y 参数:

$$\text{The unit circle is } x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{so } x = \cos\theta, dx = -\sin\theta d\theta, \quad y = \sin\theta, dy = \cos\theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \langle y, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_0^{\pi/4} \langle \sin\theta, \cos\theta \rangle \cdot \langle -\sin\theta d\theta, \cos\theta d\theta \rangle \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

C_3 的轨迹从 $(2^{1/2}/2, 2^{1/2}/2)$ 到 $(0,0)$, 将其看作 t 时间内的位移, 参数化后:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

在这里我们注意到 $x = y$, 所以可以进一步参数化:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t = u, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t = u, \quad 0 \leq u \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$dx = du, \quad dy = du$$

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \langle y, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \langle u, u \rangle \cdot \langle du, du \rangle = -\frac{1}{2}$$

因为质点是从 $(2^{1/2}/2, 2^{1/2}/2)$ 到 $(0,0)$, 所以参数替换后的积分域的上限是0, 下限是 $2^{1/2}$

$$W = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

在力场中的移动所做的总功为0, 从图中看, 就是从起点出发, 最终回到了起点。

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 多变量微积分

标签: 线积分

好文要顶 关注我 收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

+加关注

2
推荐

0
反对

« 上一篇: [多变量微积分笔记12——平面向量场](#)

» 下一篇: [多变量微积分笔记14——保守场和独立路径](#)

posted on 2018-04-12 07:47 我是8位的 阅读(8463) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园](#) 首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn 广告 X

JAVA Office 文档在线编辑 APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes