我是8位的

I am 8 bits, what about you?

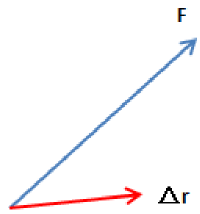
多变量微积分笔记13——线积分

线积分或路径积分是积分的一种。在数学中，线积分的积分函数的取值沿的不是区间，而是特定的曲线，称为积分路径。在物理学上，线积分是质点在外力作用下运动一段距离后总功。

线积分

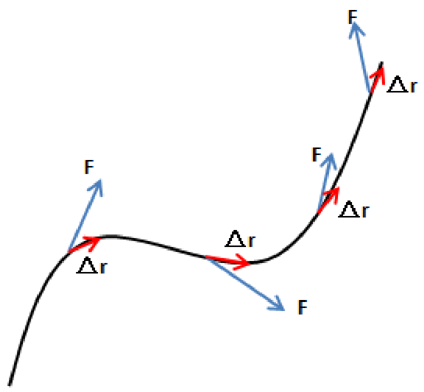
在物理学上，力所做的功等于力与位移的乘积；更严格地说，力在足够小的距离上做的功等于力的向量与位移向量的点积：

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$$



功描述是需要多少能量才能使质点以这样的方式运动。

如果外力不是恒力，要算出外力所做的总功，就是把运动轨迹分成无限小段，然后把外力对每一小段所做的功（也就是力的向量和距离的向量的点积）加起来，其本质上就是积分。



假设C是外力作用下运动的轨迹，那么外力在该轨迹上做的总功：

$$W = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

然而这种方式不利于计算，因为无法对向量进行积分。现在将位移变成瞬时速度和微小时间的乘积：

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{v}\Delta t = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t_i}\overrightarrow{\Delta t_i}$$

这表示在每个微小的时间段内，质点移动了微小的距离。W可以解释为从t_1到t_2时间内，质点在外力的作用下移动了一段距离，在这段距离上力所做的总功：

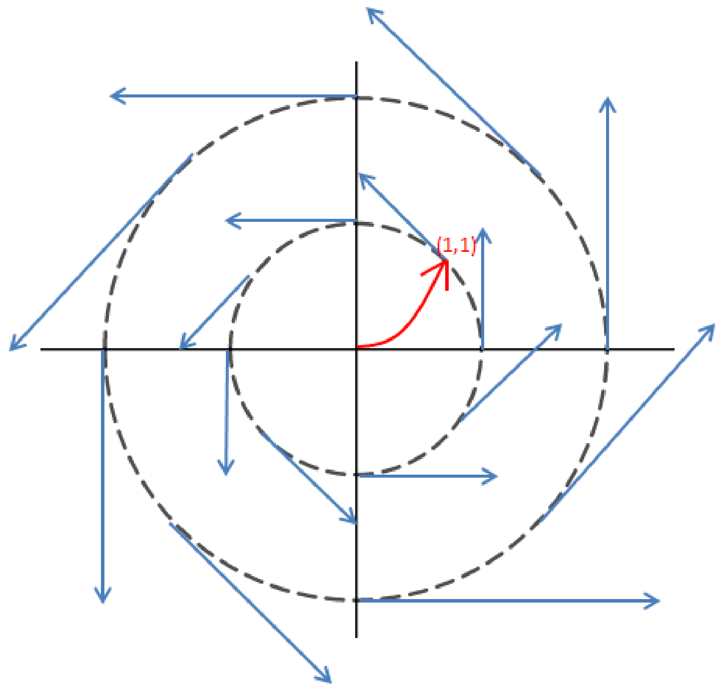
$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\left(\frac{d\vec{r}}{dt}dt\right)=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_i \vec{F}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t_i}\overrightarrow{\Delta t_i}\right)$$

这种方式将无法计算的向量积分变成了可计算的非向量积分。

向量场中的线积分

已知外力和外力作用下的运动轨迹，力场**F** = -y**i** + x**j**，运动轨迹C：x = t, y = t^2，0 ≤ t ≤ 1，计算力在该轨迹上做的功。

在这里，F是外力，C是在F作用下的运动轨迹，由运动轨迹的参数方程可知，y = x^2，这相当于在外力F的作用下运行了一段抛物线：



上图中红色向量就是在外力F作用下运动的轨迹C，为了理解方便，将t看成时间（可参考《线性代数笔记6——直线和曲线的参数方程》）。F在C上的总功：

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1 \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

$$\vec{F}=\langle -y,x\rangle=\langle -t^2,t\rangle$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\langle\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\rangle=\langle 1,2t\rangle$$

$$\int_0^1 \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\int_0^1\langle -t^2,t\rangle\cdot\langle 1,2t\rangle dt=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

另一种方式理解，**F**和**r**都有两个分量：

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$\vec{F} = \langle -y, x\rangle, \qquad d\vec{r} = \langle dx, dy\rangle$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \langle -y, x\rangle\cdot\langle dx, dy\rangle = \int_C (-ydx + xdy)$$

这里存在两个变量，但是单变量积分无法对两个变量做积分，所以需要用另外一个变量t替换x和y：

$$x = t, dx = dt;\quad y = t^2, dy = 2tdt$$

$$\int_C (-ydx + xdy) = \int_0^1 (-t^2dt + t2tdt) = \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3}$$

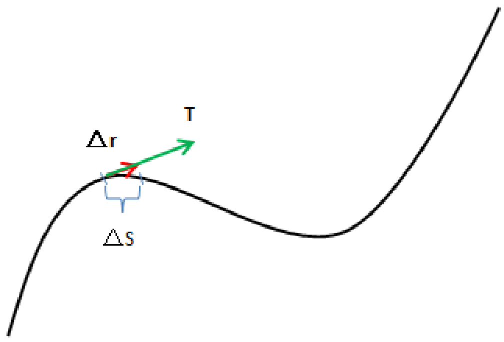
需要注意的是，线积分只取决与轨迹C，而不是如何参数化，我们可以保留任何一个参数，对于本例来说，y = x^2，可以去掉变量y：

$$\vec{F} = \langle -y, x\rangle = \langle -x^2, x\rangle, \qquad d\vec{r} = \langle dx, dy\rangle = \langle dx, 2xdx\rangle$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \langle -x^2, x\rangle\cdot\langle dx, 2xdx\rangle = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

几何法计算线积分

再来看一下几何方法：



如上图所示，曲线是质点运动的轨迹，**Δr**是在外力**F** = M**i** + N**j**作用下移动的微小距离，它是一个向量，与曲线相切；**T**是**Δr**方向的单位向量；ΔS是轨迹上对应的弧长，是一个标量。

$$\overrightarrow{\Delta r} \approx \vec{T}\Delta S => d\vec{r} = \langle dx, dy\rangle = \vec{T}ds$$

如果是瞬时速度，相当于位移关于时间的微分：

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \langle\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\rangle, \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{T}\frac{ds}{dt}$$

外力在轨迹上C上做的总功：

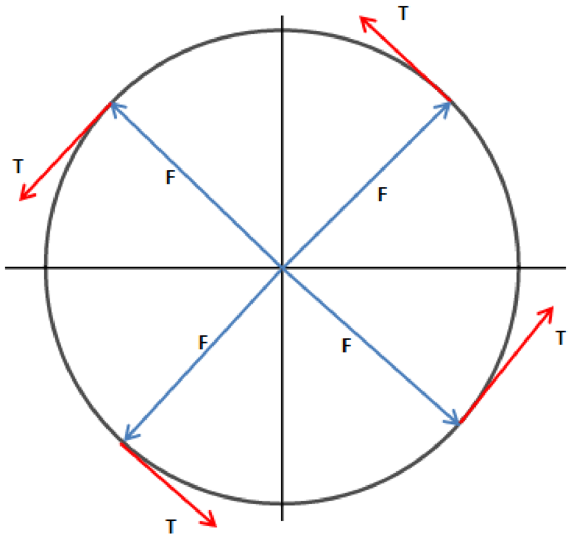
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \langle M, N\rangle\cdot\langle dx, dy\rangle = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds$$

F与**T**的点积是标量，这就将不能积分的d**r**转换成了可积的ds。

示例1

几何法对某些问题的处理会更简单：质点在力场**F** = x**i** + y**j**中沿以原点为圆心，a为半径的圆做逆时针圆周运动，对于圆上的任一点，都存在

T⊥**F**：



$$\vec{F} \perp \vec{T} => \vec{F} \cdot \vec{T} = 0$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 0$$

如果用参数方程处理，对于圆来说$x^2 + y^2 = a^2$，可以用θ替换x和y：

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} acos\theta, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} asin\theta$$

$$dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} asin\theta d\theta, \quad dy = \frac{\sqrt{2}}{2} acos\theta d\theta$$

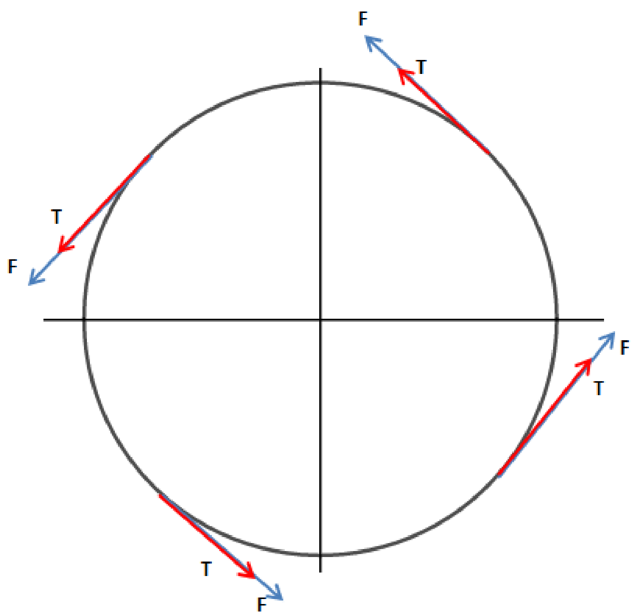
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle M,N \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle$$

$$= \int_C \langle \frac{\sqrt{2}}{2} acos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2} asin\theta \rangle \cdot \langle -\frac{\sqrt{2}}{2} asin\theta d\theta, \frac{\sqrt{2}}{2} acos\theta d\theta \rangle$$

$$= 0$$

示例2

如果力场变为**F** = -y**i** + x**j**，则在轨迹上的任意点，**F**平行于**T**：



$$\vec{F}//\vec{T} => \vec{F}\cdot\vec{T} = |\vec{F}| = \sqrt{x^2+y^2} = a$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \int_C ads = a\int_C ds = alen(c)$$

C是沿着圆的运动轨迹，ds是轨迹上微小的弧长，所以弧长的积分等于轨迹长度len(C)。如果运动一周：

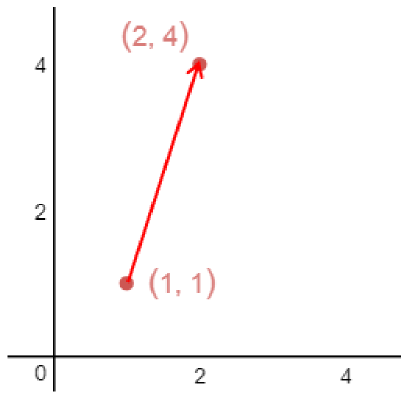
$$alen(c) = a(2\pi a) = 2\pi a^2$$

综合示例

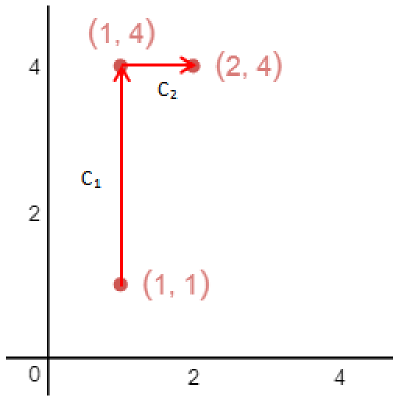
示例1

在向量场**F** = <xy, x^2 + y^2>中，计算线积分$\int_C$**F**d**r**

a)



b)



a)

根据轨迹参数化：

$$x = t, \quad y = 3t - 2, \quad 1 \le t \le 2$$

$$dx = dt, \quad dy = 3dt$$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \langle xy, x^2 + y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_C xydx + \int_C x^2dy + \int_C y^2dy \\ &= \int_1^2 t(3t-2)dt + \int_1^2 t^2 3dt + \int_1^4 y^2dy \\ &= (t^3 - t^2)|_1^2 + t^3|_1^2 + \frac{y^3}{3}\bigg|_1^4 \\ &= 32\end{aligned}$$

b)

C_1轨迹上，x = 1不变，dx=0，1 ≤ y ≤ 4:

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \langle xy, x^2 + y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_{C_1} xydx + \int_{C_1} (x^2 + y^2)dy \\ &= 0 + \int_1^4 (1 + y^2)dy \\ &= \left(y + \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_1^4 \\ &= 24\end{aligned}$$

C_2轨迹上，y = 4不变，dy=0，1 ≤ x ≤ 2:

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \langle xy, x^2 + y^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_{C_2} xydx + \int_{C_2} (x^2 + y^2)dy \\ &= \int_1^2 4xdx + 0 \\ &= 2x^2|_1^2 \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 24 + 6 = 30$$

示例2

在向量场**F** = <xy, x^2 + y^2>中，C的轨迹函数是y = x^2，从(1,1)到(2,4)。用两种参数方程计算线积分$\int_C$**F**d**r**，1) x = t，y = t^2 2) x = e^t，y = e^{2t}

1)

$$dx = dt, \quad dy = 2tdt$$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_C \langle xy, x^2+y^2\rangle \cdot \langle dx, dy\rangle \\ &= \int_C (xydx + x^2dy + y^2dy) \\ &= \int_1^2 (t^3dt + 2t^3dt + 2t^5dt) \\ &= \int_1^2 3t^3dt + \int_1^2 2t^5dt \\ &= \frac{3}{4}t^4\Big|_1^2 + \frac{1}{3}t^6\Big|_1^2 \\ &= \frac{129}{4}\end{aligned}$$

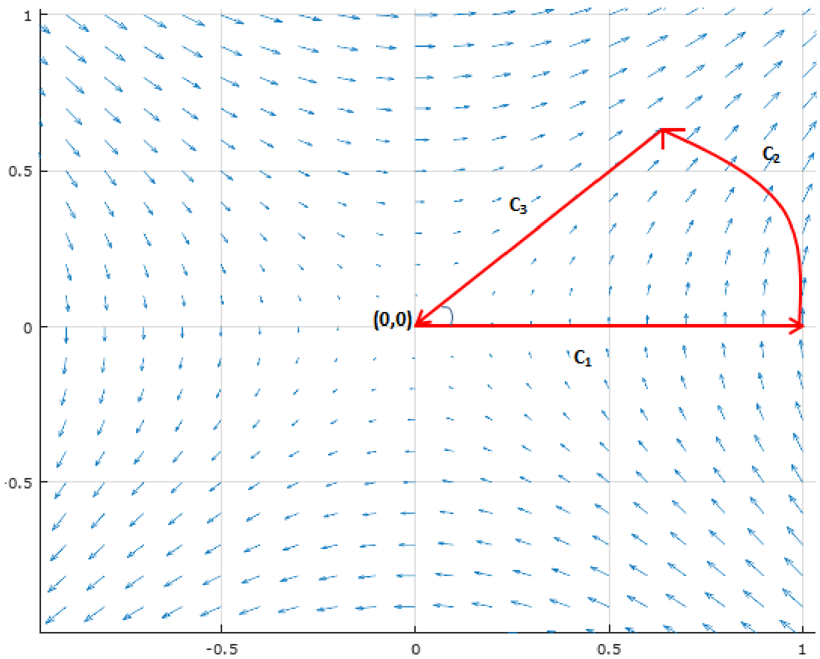
2)

$$dx = e^t dt, \quad dy = 2e^t dt, \quad 0 \le t \le ln2$$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_C (xydx + x^2dy + y^2dy) \\ &= \int_0^{ln2} (3e^{4t} + 2e^{6t})\,dt \\ &= \frac{3}{4}e^{4t}\Big|_0^{ln2} + \frac{1}{3}e^{6t}\Big|_0^{ln2} \\ &= \frac{129}{4}\end{aligned}$$

示例3

如下图所示，在向量场**F** = y**i** + x**j**中，质点移动的轨迹是$C_1 \to C_2 \to C_3$，三段轨迹围成了闭合的扇形，扇形的半径是1，弧度是 π/4，求力场中对质点的总功。



$$W = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

C_1的轨迹在x轴，从(0,0) 到 (1,0)，y = 0保持不变：

$$y = 0, dy = 0$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \langle y, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \int_{C_1} (ydx + xdy) = 0$$

C_2的轨迹在是单位圆的一段弧长，可以参数化x,y参数：

$$The\ unit\ circle\ is\ x^2 + y^2 = 1$$

$$so\ x = cos\theta, dx = -sin\theta d\theta, \quad y = sin\theta, dy = cos\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \langle y, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_0^{\pi/4} \langle sin\theta, cos\theta \rangle \cdot \langle -sin\theta d\theta, cos\theta d\theta \rangle \\ &= \int_0^{\pi/4} (cos^2\theta - sin^2\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} cos2\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} sin2\theta \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

C_3的轨迹从($2^{1/2}$/2, $2^{1/2}$/2)到(0,0)，将其看作t时间内的位移，参数化后：

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad 0 \le t \le 1$$

在这里我们注意到x = y，所以可以进一步参数化：

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t = u, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t = u, \quad 0 \le u \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$dx = du, \quad dy = du$$

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \langle y, x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \langle u, u \rangle \cdot \langle du, du \rangle = -\frac{1}{2}$$

因为质点是从($2^{1/2}$/2, $2^{1/2}$/2)到(0,0)，所以参数替换后的积分域的上限是0，下限是$2^{1/2}$

$$W = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

在力场中的移动所做的总功为0，从图中看，就是从起点出发，最终回到了起点。

随笔

分类: 多变量微积分

标签: 线积分

« 上一篇： 多变量微积分笔记12——平面向量场
» 下一篇： 多变量微积分笔记14——保守场和独立路径